Note (informali) sulla relatività ristretta

G.Falqui, Dipartimento di Matematica e Applicazioni,
Università di Milano–Bicocca.

Corso di Sistemi Dinamici e Meccanica Classica, a.a. 2008/2009 e seguenti.

Terza versione, 17 Ottobre 2010.
Commenti e correzioni sono benvenuti.
Queste note, delle quali sottolineo il carattere preliminare, riportano il contenuto delle lezioni sulla relatività Galileiana e di Einstein (ristretta) tenute nel corso.

Contents

1 "Richiami" sulla relatività Galileiana

Consideriamo l'insieme degli eventi $\mathcal{M}^4$, detto *spazio-tempo*. Un evento $\mathcal{E}$ è un accadimento elementare spazio-temporale, che un osservatore può caratterizzare assegnadogli un numero reale $t(\mathcal{E})$ (il momento temporale nel quale

l'evento accade), ed un punto $\vec{P}(\mathcal{E})$ dello spazio tridimensionale fisico $\mathcal{S}^3$. Risulta naturale, nel quadro della meccanica di Galileo e Newton (e lo sarà anche nelle relatività *ristretta* di Einstein) supporre che lo spazio-tempo sia piatto; quindi avremo una classe di osservatori per i quali la corrispondenza

$$\mathcal{E} \rightarrow (t(\mathcal{E}), \vec{P}(\mathcal{E}))$$

sarà biunivoca (ovvero, lo spazio-tempo èidentificabile con il prodotto Cartesiano $\mathbb{R}\times\mathcal{S}^3$. Operativamente, un raffinamento di questa identificazione verrà fatta, da un osservatore nel seguente modo: fissato un evento di riferimento $\mathcal{O}$, ogni altro evento $\mathcal{E}$ potrà essere identificato associando la quaterna di numeri reali (t, x^1, x^2, x^3) ottenuti nel seguente modo:

- t è l'intervallo di tempo intercorso tra $\mathcal{O}$ e $\mathcal{E}$;
- (x^1, x^2, x^3) sono le componenti del vettore $\vec{OE} = \vec{P}(\mathcal{E}) - \vec{P}(\mathcal{O})$ che connette i punti dello spazio fisico dove "avvengono" gli eventi in considerazione, rispetto ad una *qualsiasi* base (e_1, e_2, e_3) di vettori di $\mathcal{S}^3$ aventi origine in $\vec{P}(\mathcal{O})$.

Un altro osservatore $\mathcal{O}'$, della classe che stiamo considerando, assegnerà agli eventi un'altra quaterna (t', x'^1, x'^2, x'^3). Chiamando per comodità la coordinata temporale come x^0, e dunque denotando le quaterne come $(x^\beta)_{\beta=0,\ldots,3}$ e $(x'^\alpha)_{\alpha=0,\ldots,3}$ è possibile mostrare che sotto le ipotesi di omegeneità, isotropia e piattezza (in una parola, dell'esistenza di una struttura affine quadridimensionale) su $\mathcal{M}^4$ implica

Proposizione 1.1 *La legge di trasformazione tra le coordinate* $(x^\alpha)_{\alpha=0,\ldots,3}$ *ed* $(x'^\beta)_{\beta=0,\ldots,3}$*, assegnate da due osservatori agli eventi è della forma*

$$x'^\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} A^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha, \qquad \textit{per } \alpha = 0, 1, 2, 3\,, \tag{1.1}$$

dove a^α *è la quaterna delle coordinate che l'osservatore "primato" associa all'evento di riferminento dell'osservatore non primato, e* $A^\alpha{}_\beta$ *è una matrice* invertibile *a quattro righe e quattro colonne.*

Note.

1. Il concetto di osservatore inerziale è, dal punto di vista fisico, piuttosto sottile. Riprendendo brevemente le nozioni del corso di Fisica 1, possiamo sintetizzarle così. Si suppone che esistano riferimenti inerziali, ovvero riferimenti rispetto ai quali le leggi della fisica assumono la stessa forma. Due riferimenti inerziali sono collegati da una legge della forma (1.1). Perlatro, l'inerzialità "assoluta" di un sistema di riferimento è una questione delicata; ad esempio, un sistema di riferimento solidale ad un laboratorio può essere considerato inerziale rispetto ad un certo insieme di esperimenti e rispetto ad una certa precisione, o scala di fenomeni (e.g., l'allungamento di una molla, o la misurazione dell'accelerazione di gravità $g \simeq 9.8\text{metri}/\text{sec}^2$); lo stesso sistema cessa di essere inerziale (la terra è in rotazione rispetto alla'asse polo Nord - polo Sud!) qualora gli esperimenti coinvolgano scale temporali o spaziali più ampie (vedi il pendolo di Foucault).

2. Scritta per esteso, la relazione (1.1) si legge

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0{}_0 & A^0{}_1 & A^0{}_2 & A^0{}_3 \\ A^1{}_0 & A^1{}_1 & A^1{}_2 & A^1{}_3 \\ A^2{}_0 & A^2{}_1 & A^2{}_2 & A^2{}_3 \\ A^3{}_0 & A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

3. Nella relazione (1.1) si intende che gli elementi di matrice $A^\alpha{}_\beta$ e gli elementi a^α *non* dipendono da x^α; in particolare, gli elementi $A^0{}_0$ ed $A^i{}_j$, con $i, j = 1, 2, 3$ sono costanti numeriche; gli elementi $A^i{}_0$ ($i = 1, 2, 3$)sono costanti con la dimensione fisica di una velocità, mentre gli elementi $A^0{}_i, i = 1, 2, 3$ sono constanti con dimensione fisica pari all'inverso di una velocità[1]. Questa discrepanza verrà eliminata nella relatività speciale di Einstein, dove $x^0 = c\,t$, con c velocità della luce nel vuoto.

4. È possibile *dimostrare* la tesi della Proposizione; noi qui non lo faremo; possiamo peraltro notare che la sufficienza della condizione sulla forma delle trasformazioni di coordinate – cioè che trasformazioni della forma (1.1) danno ad $\mathcal{M}^4$ una struttura di spazio affine – è facilmente dimostrabile.

[1] Ricordiamo che $[V] = \dfrac{L}{T}$.

5. Nella trattazione dei sistemi rigidi di punti, si considereranno trasformazioni di coordinate in cui gli elementi della sottomatrice 3×3 $A^i{}_j$ dipendono dal tempo. Osservatori siffatti, peraltro non sono inerziali l'uno rispetto all'altro.

6. Più avanti, specie nella parte sulla relatività speciale di Einstein, utilizzeremo la cosiddetta convenzione di somma (di Einstein) che dice che se in una relazione "matriciale" compaiono due indici ripetuti, essi devono esser intesi come indici sui quali si somma, mentre gli indici non ripetuti – detti indici liberi – assumono tutti i valori possibili. Per esempio, la relazione (1.1) ovvero

$$x'^\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} A^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha, \qquad \text{per } \alpha = 0, 1, 2, 3\,,$$

con al convenzioni di Einstein si scriverebbe

$$x'^\alpha = A^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha. \tag{1.3}$$

Un altro modo per scrivere relazioni di questo tipo è, denotando con $\underline{x}$ la quaterna x^α (e lo stesso per x'^α e a^α) e con $\mathbf{A}$ la matrice $A^\alpha{}_\beta$, è

$$x'^\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} A^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha, \;\; \text{per } \alpha = 0, 1, 2, 3 \;\Leftrightarrow \underline{x'} = \mathbf{A} \cdot \underline{x} + \underline{a}. \tag{1.4}$$

Consideriamo ora tre osservatori inerziali, i quali parametrizzino gli eventi con le coordinate, rispettivamente, x^α, x'^α e x''^α. Dovranno valere le due relazioni

$$x'^\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} A^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha, \;\; \text{per } \alpha = 0, 1, 2, 3\,, \tag{1.5}$$

$$x''^\gamma = \sum_{\alpha=0}^{3} B^\gamma{}_\alpha x'^\alpha + b^\gamma, \;\; \text{per } \gamma = 0, 1, 2, 3\,. \tag{1.6}$$

Sostituendo (1.5) in (1.6) otteniamo

$$\begin{aligned}
x''^{\gamma} &= \sum_{\alpha=0}^{3} B^{\gamma}{}_{\alpha}\big(\sum_{\beta=0}^{3} A^{\alpha}{}_{\beta}x^{\beta} + a^{\alpha}\big) + b^{\gamma} = \\
&\text{invertendo l'ordine delle somme su } \beta \text{ e } \alpha \\
&= \sum_{\beta=0}^{3}\big(\sum_{\alpha=0}^{3} B^{\gamma}{}_{\alpha}A^{\alpha}{}_{\beta}\big)x^{\beta} \ + \sum_{\alpha=0}^{3} B^{\gamma}{}_{\alpha}a^{\alpha} + b^{\gamma} = \\
&= \sum_{\beta=0}^{3} C^{\gamma}{}_{\beta}x^{\beta} + c^{\gamma},\ \gamma = 0, 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

In questa formula si vede che la matrice $\mathbf{C}$ è il prodotto (righe per colonne) delle matrici $\mathbf{B}$ ed $\mathbf{A}$ (in quest'ordine, ovvero $\mathbf{C} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}$) mentre la quaterna $\underline{c}$ è data da $\underline{c} = \mathbf{B} \cdot \underline{a} + \underline{b}$.

Interpretando la relazione

$$x'^{\alpha} = \sum_{\beta=0}^{3} A^{\alpha}{}_{\beta}x^{\beta} + a^{\alpha}, \ \text{ per } \alpha = 0, 1, 2, 3\,, \tag{1.8}$$

come una applicazione affine in $\mathbb{R}^4$, cioè che alla quaterna x^{α} associa la quaterna x'^{α}, (questa applicazione è qualificata dalla matrice $\mathbf{A}$ e dal vettore $\underline{a}$), possiamo dunque affermare che la relazione (1.7) afferma che la composizione di due di tali applicazioni è ancora una applicazione della stessa forma; inoltre, è immediato verificare che la trasfromazione (1.8), con $\underline{a} = \underline{0}$, e $\mathbf{A} = \mathbf{Id}_4$ – la matrice identità di ordine 4 – è la trasformazione identica; infine, data la trasformazione, (1.8) si osserva che componendola con la trasformazione

$$x'^{\alpha} = \sum_{\beta=0}^{3} B^{\alpha}{}_{\beta}x^{\beta} + b^{\alpha}, \ \text{ per } \alpha = 0, 1, 2, 3\,, \tag{1.9}$$

scegliendo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ e $\underline{b} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \underline{a}$ si ottiene la trasformazione identica. In termini matematici, qyueste tre proprietà conferiscono all'insieme delle trasformazioni tra osservatori inerziali la struttura di *Gruppo*.

1.1 Le trasformazioni di Galileo

La meccanica di Galileo e Newton fa due ulteriori (rispeto all'assunzione di affinità) ipotesi sulle proprietà strutturali dello spazio-tempo. Esse sono:

- L'invarianza (rispetto ad osservatori inerziali) dell'intervallo di tempo che intercorre tra due eventi.
- L'esistenza di una struttura Euclidea sullo spazio fisico (o, per meglio dire, sullo sopazio degli eventi contemporanei); per struttura euclida intendiamo l'esistemnza di un prodotto scalare (positivo definito) sullo spazio $\mathbb{E}_{\not{\mathbb{K}}}$.

La conseguenza della prima richiesta è la seguente. Considerati due eventi generici $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ abbiamo che

$$t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 \tag{1.10}$$

dove, per semplicità di notazione, abbiamo posto $t_1 = t(\mathcal{E}_1)$ et similia. Se x^i_1, x^i_2 sono le coordinate spaziali dei due eventi rispetto ad un osservatore (e ${x'}^1_1$, ${x'}^i_2$ lo sono per l'altro osservatore) si dovrà avere, per la legge (1.1)

$$t'_2 - t' - 1 = A^0{}_0(t_2 - t_1) + \sum_{i=1}^{3} A^0{}_i(x^i_2 - x^i_1). \tag{1.11}$$

Imponendo che (1.10) valga per ogni coppia di eventi (cioè, matematicamente, per ogni terna $\{x^i_2 - x^i_1\}_{i=1,2,3}$ se ne deduce che

$$A^0{}_0 = 1; \quad A^0{}_i = 0, i = 1,2,3 \tag{1.12}$$

ovvero che la prima riga della matrice $A^\alpha{}_\beta$ è data dalla quaterna $(1,0,0,0)$. **Nota**. In questa deduzione abbiamo fatto due ipotesi: una è che i due osservatori misurino il tempo utilizzando la stessa unità di misura; l'altra è che ci sia accordo anche sul verso di scorrimento del tempo, e non solo dell'intervallo temporale tra due eventi qualsiasi. La possibilità di accordarsi sull'unità di misura è una coseguenza dell'omogeneità tenporal;e dello spazio tempo $\mathcal{M}^4$; la seconda ipotesi è in effetti semplificativa. Richiedendo solo la invarianza dell'intervallo temporaletra due eventi, ovvero richiedendo che, per ogni coppia di eventi si abbia

$$|t_2 - t_1| = |t'_2 - t'_1|$$

le conclusioni riportate in (1.12) si modificano come

$$A^0{}_0 = \pm 1; \quad A^0{}_i = 0, i = 1,2,3 \tag{1.13}$$

Per descrivere la conseguenza della seconda richiesta, è utile osservare quanto segue. Lo spazio degli eventi contemporanei parametrizza distanze spaziali tra eventi che avvengono (per quanto detto prima, per ogni osservatore) allo stesso tempo. È dunque naturale identificare questo spazio con lo spazio fisico $\mathbb{E}_3$, dei vettori applicati in un punto. L'ipotesi dell'esistenza di un prodotto scalare su $\mathbb{E}_3$ implica che due osservatori qualsiasi possono stipulare di identificare posizioni nello spazio per mezzo di una terna di assi cartesiani ortogonali, ovvero utilizzare basi di vettori ortonormali in $\mathbb{E}_3$. Dunque, se, mantenendo la notazione qui sopra, si hanno due eventi contemporanei $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, avremo $t_2 = t_1 \Leftrightarrow t'_2 = t'_1$, e, per quello che riguarda le posizioni nello spazio, si avrà

$$\underbrace{\vec{OP_2} - \vec{OP_1}}_{\sum_i (x^i_2 - x^i_1)\vec{e_i}} = \underbrace{\vec{O'P_2} - \vec{O'P_1}}_{\sum_i ({x'}^i_2 - {x'}^i_1)\vec{e'_i}}$$

dove le terne $\vec{e_i}$ e $\vec{e'_i}$ sono costituite (rispettivamente) di vettori a due a due ortogonali e di lunghezza unitaria, ovvero:

$$\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \vec{e'_i} \cdot \vec{e'_j} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases} \tag{1.14}$$

Dunque, la lunghezza (al quadrato) del vettore $\vec{OP_2} - \vec{OP_1} \equiv \vec{O'P_2} - \vec{O'P_1}$ sarà data da

$$|\vec{OP_2} - \vec{OP_1}|^2 = \sum_{i=1}^{3} (x^i_2 - x^i_i)^2 = \sum_{i=1}^{3} ({x'}^i_2 - {x'}^i_1)^2. \tag{1.15}$$

Utilizziamo la seconda di queste relazioni, ricordando che la legge di trasformazione (1.1) tra le coordinate dei due osservatori dà luogo, per eventi contemporanei, alla legge

$$({x'}^i_2 - {x'}^i_1) = \sum_{j=1}^{3} A^i{}_j (x^j_2 - x^j_1); \tag{1.16}$$

Sostituendo si ottiene

$$\sum_{i=1}^{3} (x^i_2 - x^i_1)^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{l=1}^{3} A^i{}_l (x^l_2 - x^l_1) \right) \left(\sum_{k=1}^{3} A^i{}_k (x^k_2 - x^k_1) \right), \tag{1.17}$$

e, infine, invertendo l'ordine delle somme,

$$\sum_{i=1}^{3}(x_2^i - x_1^i)^2 = \sum_{l,k=1}^{3}\left((\sum_{i=1}^{3} A^i{}_l A^i{}_k)(x_2^l - x_1^l)(x_2^k - x_1^k)\right). \tag{1.18}$$

Dato che ciò deve valere per ogni terna $(x_2^i - x_1^i)_{i=1,2,3}$ ne concludiamo che deve essere, necessariamente

$$\sum_{i=1}^{3} A^i{}_l A^i{}_k = \delta_{l\,k}, \tag{1.19}$$

dove δ_{lk} è il simbolo di Kronecker. In termini matriciali si ha che la matrice $\mathbf{A}$ di elementi $A^i{}_j$ deve soddisfare

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}_3 \Leftrightarrow \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{ e dunque vale anche } \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{1}_3).$$

In altre parole, la matrice $\mathbf{A}$ deve appartenere al gruppo ortogonale in 3 dimensioni, $O(3)$. Senza perdita di generalità, suppporemo che $\mathbf{A} \in SO(3)$, cioè che $\mathbf{A}$ sia una matrice ortogonale a determinate unitario [2]. A questo punto possiamo affermare che, se $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ sono due osservatori inerziali (secondo Galileo) i quali parametrizzano gli eventi con quaterne – rispettivamente – (t, x^1, x^2, x^3) e (t', x'^1, x'^2, x'^3), le ipotesi dell'assolutezza degli intervalli spaziali e dell'esistenza di una metrica su (ogni) insieme di eventi contemporanei porta a concludere che la legge di trasformazioni tra le quaterne (t, x^1, x^2, x^3) e (t', x'^1, x'^2, x'^3) è della forma

$$\begin{pmatrix} t' \\ x'^1 \\ x'^2, \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v^1 & A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ v^2 & A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ v^3 & A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x^1 \\ x^2, \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2, \\ a^3 \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

Non è difficile dimostrare (questo è lasciato al lettore come esercizio) che il principio di inerzia implica che la terna (v^1, v^2, v^3) e la matrice 3×3 A non possono dipendere dal tempo, e che la terna v_i rappresenta la velocità che il riferimento $\mathcal{O}'$ associa all'origine di $\mathcal{O}$.
Dunque ne concludiamo che il gruppo (inomogeneo) di Galileo è rappresentato da terne (A, v, a) dove:

[2] Questo equivale a richiedere che i due osservatori abbiano scelta la stessa orientazioni per le terne spaziali.

1. A è una matrice di $SO(3)$, che collega le terne di riferimenti spaziali di $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$.

2. v è una terna di numeri reali che rappresenta la velocità relativa delle due terne. Tale velocità è costante bel tempo.

3. a (le parte inomogenea del gruppo) è una quaterna di numeri reali che rappresenta la traslazione di "evento origine".

Non è difficile verificare che se l'insieme delle trasformazioni definite da (1.20) è un gruppo continuo a 10 parametri. In particolare, se (A, v, a) è la terna che rappresenta la trasfromazione di coordinate che collega due riferimenti inerziali $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ e (B, w, b) è la terna che rappresenta quella tra $\mathcal{O}'$ ed un tero riferimento inerziale $\mathcal{O}''$, si avrà che la terna che rappresenta la trasformazione di coordinate che collega $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}''$ è ancora della stessa forma, ovvero sarà data da (C, u, c) con

$$C^i_j = \sum_{k=1}^3 B^i_k A^k_j (\text{ in termini di matrici e vettori: } C = B \cdot A)$$

$$c = b + \widetilde{a}, \text{ dove } \widetilde{a}^0 = a^0,\ \widetilde{a}^i = \sum_k B^i_k a^k \quad (\underline{\widetilde{a}} = B\underline{a}).$$

$$u^i = \sum_k B^i_k v^k + w^i \quad (\underline{u} = B \cdot \underline{v} + \underline{w}).$$

Da queste osservazioni si evince che sottogruppi notevoli del gruppo di Galileo inomogeneo sono:

- Il sottogruppo delle *pure traslazioni*, ovvero degli elementi della forma $(\mathbf{1}_3, 0, a)$
- Il sottogruppo omogeneo, ovvero il sottogruppo formato dagli elementi della forma $(A, v, 0)$, $A \in SO(3)$.
- Il sottogruppo delle rotazioni, formato dagli elementi della forma $(A, 0, 0)$ (ed i suoi sottogruppi ad un parametro)
- Il sottogruppo dei cosiddetti *boosts* di Galileo, formato dagli elementi della forma $(\mathbf{1}_3, v, 0)$.

Notiamo in particolare che la legge di composizione di trasfromazioni (in particolare, di due boosts) di Galileo dice che se $\mathcal{O}'$ vede $\mathcal{O}$ muoversi con

velocità $\vec{v}$ e $\mathcal{O}''$ vede $\mathcal{O}'$ muoversi con verlocità $\vec{w}$, allora $\mathcal{O}''$ vedrà $\mathcal{O}$ muoversi con velocità

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}. \tag{1.21}$$

Ovvero, nel gruppo di Galileo le velocità si compongono tramite una semplice legge additiva. Più in generale, consideriamo il moto di una particella (o di un onda); dalle leggi di trasformazioni di Galileo, (in particolare, notando che $dt = dt'$) se $\mathcal{O}$ assegna alla particella (onda) la velocità $\dot{\vec{x}}$, allora $\mathcal{O}'$ assegnerà allo stesso moto la velocità $\dot{\vec{x'}}$ data da

$$\dot{\vec{x'}} = \dot{\vec{x}} - \vec{v}.$$

Michelson-Morley et. al. . La teoria della reletività Galileiana è una teoria autoconsistente e consistente con un vasto insieme di fenomeni (non è questa la sede per discuterli), segnatamente i fenomeni meccanici. Essa entra in crisi qualora si vogliano considerare fenomeni elettromagnetici, ed in particolare la teoria – formalizzata nella sua forma definitiva da Maxwell verso la fine del XIX secolo – dei campi elettromagnetici.

Come si vedrà più oltre, le equazioni di Maxwell prevedono che impulsi elettromagnetici (onde elettromagnetiche) propaghino nel vuoto ad una velocità molto grande ma finita c. Dalla legge di composizione delle velocità che si desume dalle leggi di trasformazione di Galileo si ottiene che se c è la velocità che un osservatore $\mathcal{O}$ assegna ad un "raggio di luce" che propaga nella direzione dell'asse x, e $\mathcal{O}'$ è un altro osservatore che si muove rispetto ad $\mathcal{O}$ con velocità v diretta lungo l'asse x, allora esso dovrebbe osservare lo stesso raggio propagarsi con velocità $c' = c \pm |v|$, dove il segno $\pm$ dipende dal verso relativo delle velocità del raggio e del riferimento $\mathcal{O}'$.

Accurati esperimenti sostanzialmente svolti tra la fine del XIX secolo e l'inzio del XX, il più noto dei quali è probabilmente l'esperimento di Michelson e Morley, mostrarono che ciò non accade, e che (il modulo del)la velocità delle luce nel vuoto è indipendente dal riferimento inerziale, e vale

$$c \simeq 3 \times 10^{10} cm/sec (= 300.000 km/sec). \tag{1.22}$$

Questo fu probabilmente il motivo[3] che portò Albert Einstein, nel 1905, a ripensare profondamente alle ipotesi alla base della comune rappresentazione

[3] Il titolo dell'articolo originale nel quale la teoria della Relatività Ristretta venne formulata è "Sull'Elettrodinamica dei Corpi in Movimento".

di tempo e spazio; in particolare (nella teoria della *Relatività Ristretta*) Einstein conservò l'assunzione di piattezza ed affinità dello spazio-tempo, e, soprattutto, il principio di relatività, inteso come principio di equivalenza della classe degli osservatori inerziali per la descrizione dei fenomeni fisici[4]. Con queste premesse, l'unica possibilità era che le leggi di trasformazione tra due osservatori inerziali non fossero quelle di Galileo.

In particolare consideriamo la propagazione di un raggio di luce, e supponiamo che sia descritto dalla succesione di eventi $\mathcal{E}_\lambda$. Un osservatore $\mathcal{O}$ assocerà a tale sequenza di eventi le coordinate spazio-temporali $(t(\lambda), x^i(\lambda))$, mentre l'osservatore $\mathcal{O}'$ assocerà la sequenza $(t'(\lambda), x'^i(\lambda))$. Il modulo della velocità di propagazione del raggio sarà calcolato da $\mathcal{O}$ come

$$c^2 = \sum_{i=1}^{3} (\frac{dx^i}{dt})^2,$$

e da $\mathcal{O}'$ come

$$c'^2 = \sum_{i=1}^{3} (\frac{dx'^i}{dt'})^2.$$

Da $c' = c$ segue

$$c^2 dt^2 - \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2 = 0 \Leftrightarrow c^2 dt'^2 - \sum_{i=1}^{3} (dx'^i)^2 = 0$$

e questo è sicuramente vero se supponiamo che le trasformazioni che legano le differenze delle coordinate di due eventi (ovvero, la parte omogenea della trasformazione di coordinate) siano tali da conservare la forma quadratica

$$Q_M(x^\mu) = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2 \quad \text{con } x^0 = ct. \tag{1.23}$$

Lo spazio-tempo dotato di questa (pseudo) metrica viene comunemente detto spazio-tempo di Minkowski e la sua struttura (ovvero il gruppo di trasfor-

[4] Ad un certo punto, per superare l'antinomia tra la costanza della velocità della luce e le trasformazioni di Galileo, si propose di rinunciare proprio al principio di equivalenza, ipotizzando che esistesse un riferimento privilegiato nel quale la velocità della luce fosse proprio quella data da (1.22)(la cosiddetta ipotesi dell'etere). Tecnicamente, l'esperianza di Michelson – Morley falsifica proprio l'ipotesi dell'etere.

mazioni che preservano tale pseudo-metrica) è detta struttura di Lorentz[5]. In definitiva, la teoria della relatività ristretta di Einstein prevede che le trasformazioni tra due riferimenti inerziali preservino, sullo spazio vettoriale delle "elongazioni" tra eventi, la forma quadratica (1.23)

2 Struttura Lorentziana dello Spazio-Tempo

Lo spazio-tempo della relatività ristretta di Einstein è uno spazio affine quadridimensionale, detto anche spazio di Minkowski, dotato di una *pseudo*metrica (o metrica Lorentziana) di segnatura $(1,3)$, rappresentata dalla matrice

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

L'insieme delle trasformazioni affini che preservano tale struttura è detto gruppo[6] di Poincaré, che può essere rappresentato come l'insieme delle trasformazioni di $\mathbb{R}^4$ date da

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} x^{\beta} + a^{\alpha}, \tag{2.2}$$

con

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \tag{2.3}$$

Proposizione 2.1 *L'insieme delle trasformazioni affini della forma (2.2) è un sottogruppo del gruppo delle trasformazioni affini del piano.*

Dimostrazione. Basta limitarsi a dimostrare la proposizione per la componente omogenea di tale insieme, ovvero verificare che l'insieme delle matrici Λ che soddifano la relazione $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ è un sottogruppo del gruppo delle matrici invertibili 4×4. Ovvero si deve dimostrare che:

a) Matrici che soddisfano (2.3) sono invertibili;

[5] Minkowski aveva introdotto la sua pseudometrica – anche se nel piano – per dimostrare l'indipendenza del quinto postulato di Euclide dagli altri quattro. Il piano $\mathbb{R}^2$ dotato della metrica di Minkowski $Q(x,y) = x^2 - y^2$ è il prototipo di spazio dotato di geometria *iperbolica*.

[6] Grazie alla proposizione poco più oltre.....

b) La matrice identica appartiene a tale insieme;

c) Date due matrici Λ_1, Λ_2, entrambe che soddisfano (2.3), il loro prodotto soddisfa (2.3);

d) Se Λ soddisfa (2.3) allora anche Λ^{-1} soddisfa (2.3).

Per provare a) è sufficiente applicare il teorema di Binet alla relazione caratteristica (2.3); in particolare abbiamo che

$$\Lambda^T \, \eta \, \Lambda = \eta \Rightarrow \mathrm{Det}(\Lambda) = \pm 1. \tag{2.4}$$

La proprietà b) è autoevidente.
Per provare c), notiamo che $(\Lambda_1 \cdot \Lambda_2)^T = \Lambda_2^T \cdot \Lambda_1^T$; la relazione caratteristica diventa

$$(\Lambda_1 \cdot \Lambda_2)^T \eta \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \Lambda_2^T \cdot \underbrace{\Lambda_1^T \eta \Lambda_1}_{=\eta} \cdot \Lambda_2 = \Lambda_2^T \eta \Lambda_2 = \eta. \tag{2.5}$$

Infine, per provare d) si considera $(\Lambda^{-1})^T \eta \Lambda^{-1}$; che questa matrice sia pari a η ogni volta che Λ soddisfa (2.3) si può verificare ricordando che (per ogni matrice invertibile) $(\Lambda^{-1})^T = (\Lambda^T)^{-1}$ e leggendo "al contrario" la (2.3), cioè sostituendo $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$.

$\square$

Scrivendo per esteso la relazione matriciale $\Lambda^T \, \eta \, \Lambda = \eta$ si ha (sottintendendo le somme sugli indici ripetuti in posizione diversa – cioè uno in alto ed uno in basso):

$$\Lambda^\alpha{}_\gamma \eta_{\alpha,\beta} \Lambda^\beta{}_\delta = \eta_{\gamma,\delta} \quad \gamma, \delta = 0, \ldots, 3. \tag{2.6}$$

Dalla simmetria delle equazioni, otteniamo che queste sono un insieme di 10 equazioni indipendenti nelle 16 variabili $\Lambda^\alpha{}_\beta$. dato che i parametri a^α sono arbitrari, otteniamo che il gruppo di Poincaré è un gruppo a $6 + 4 = 10$ parametri continui. Dato che, come non è difficile mostrare, le operazioni di inversione e moltiplicazione sono continue, si dice che $\mathcal{P}$ è un gruppo di Lie di dimensione 10. Si usa definire gruppo di Lorentz $\mathcal{L}$ il sottoinsieme (che è un sottogruppo) di $\mathcal{P}$ formato dalle applicazioni omogenee, cioè quello delle applicazioni per cui il vettore delle traslazioni a^α si annulla.

Vogliamo ora caratterizzare – almeno in parte – il gruppo $\mathcal{L}$. La equazione (2.6) con $\gamma = \delta = 0$ dà:

$$\Lambda^{\alpha}{}_{0}\eta_{\alpha,\beta}\Lambda^{\beta}{}_{0} = \eta_{0,0} \Leftrightarrow \eta_{0,0} = \eta_{0,0}\Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{0}{}_{0} + \sum_{i,j=1}^{3} \eta_{i,j}\Lambda^{i}{}_{0}\Lambda^{j}{}_{0}.$$

Dato che $\eta_{0,0} = 1$ e $\eta_{i,j} = -\delta_{i,j}$ si ha

$$1 = {\Lambda^{0}{}_{0}}^{2} - \sum_{i=1}^{3} {\Lambda^{i}{}_{0}}^{2} \Rightarrow {\Lambda^{0}{}_{0}}^{2} = 1 + \sum_{i=1}^{3} {\Lambda^{i}{}_{0}}^{2}, \tag{2.7}$$

da cui o $\Lambda^{0}{}_{0} \geq 1$ o $\Lambda^{0}{}_{0} \leq -1$. Notando che (2.1) implica (come nel caso del gruppo delle rotazioni) che

$$\mathrm{Det}(\Lambda) = \pm 1$$

otteniamo che il gruppo di Lorentz $\mathcal{L}$ si suddivide (almeno in) in 4 componenti connesse, labellate dal segno del deteminante e dall'intervallo cui $\Lambda^{0}{}_{0}$ appartiene.

In particolare la componente $\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$, qualificata da da $\{\mathrm{Det}(\Lambda) = 1, \Lambda^{0}{}_{0} \geq 1\}$ è un sottogruppo di $\mathcal{L}$, detta gruppo di Lorentz *proprio ortocrono*. Nel seguito ci atterremo alla descrizione di quest'ultimo. Ciò è giustificato dal fatto che, se un elemento $\bar{\Lambda}$ del gruppo di Lorentz non sta in $\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$, allora o $P\bar{\Lambda}$, o $T\bar{\Lambda}$ o $-\bar{\Lambda}(= PT\bar{\Lambda})$ stanno in $\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$, dove le matrici P e T sono definite da

$$T = \left(\begin{array}{c|c} \text{-1} & \\ \hline & \mathbf{Id}_3 \end{array}\right) \quad P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & -\mathbf{Id}_3 \end{array}\right) \tag{2.8}$$

Consideriamo ora gli elementi del sottogruppo caratterizzati da $\Lambda^{0}{}_{0} = 1$. Da (2.7) e da (2.1) si ha che la forma di questi elementi è data da

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \mathcal{R} \end{array}\right)$$

Non è difficile rendersi conto che la matrice $\mathcal{R}$ che compare in questa formula deve essere una matrice del gruppo $SO(3)$. Questo implica che, oltre alle

traslazioni, anche la rappresentazione delle rotazioni spaziali è la stessa nel gruppo di Galileo ed in quello di Poincaré.

Veniamo ora però a descrivere la differenza sostanziale tra i due gruppi, cioè i cosiddetti *boosts*, ovvero le trasformazioni tra sistemi in moto relativo. Supponiamo di considerare due sistemi di riferimento associati ad osservatori $\mathcal{O}$ and $\mathcal{O}'$ tali che $\mathcal{O}'$ veda $\mathcal{O}$ muoversi con velocità $\mathbf{v}$ (e quindi, per il principio di relatività, $\mathcal{O}$ vedrà $\mathcal{O}'$ muoversi con velocità $-\mathbf{v}$). Una particella ferma rispetto ad $\mathcal{O}$ viene descritta da $\mathcal{O}$ da una linea di universo in cui le coordinate spaziali non variano; infinitesimamente vale allora:

$$dx^\alpha e_\alpha = dx^0 e_0 \text{ (cioè } dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0). \tag{2.9}$$

Per $\mathcal{O}'$ vale

$$dx'^\beta = \Lambda^\beta{}_\alpha dx^\alpha$$

e dunque (dato che $dx^i = 0, i = 1, 2, 3$):

$$dx'^0 = \Lambda^0{}_0 dx^0, \quad dx'^i = \Lambda^i{}_0 dx^0, i = 1, 2, 3. \tag{2.10}$$

ricordando che $dx^0 = c\,dt$ e $dx'^0 = c\,dt'$, si ha anche $dt' = \Lambda^0{}_0 dt$. Per la velocità che $\mathcal{O}'$ assegna alla particella (ed in particolare, ad $\mathcal{O}$) si ha

$$v'^i = \frac{dx'^i}{dt'} = \frac{\Lambda^i{}_0 dx^0}{\Lambda^0{}_0 dt} = c\frac{\Lambda^i{}_0}{\Lambda^0{}_0}, \quad \Rightarrow \quad \Lambda^i{}_0 = \frac{v'^i}{c}\,\Lambda^0{}_0 = -\frac{v^i}{c}\,\Lambda^0{}_0, \tag{2.11}$$

dove l'ultima equazione è dovuta al fatto che $v'^i = -v^i$, già ricordato più sopra. Inserendo quest'ultimo risultato in (2.7) si ottiene

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}(\Lambda^0{}_0)^2, \quad \Rightarrow \Lambda^0{}_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}},$$

dove si è tenuto conto che stima considerando trasformazioni di $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Il fattore $\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}}$ è solitamente denominato nei testi di relatività con la lettera γ, ovvero

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}},$$

o anche, nel caso sia necessario sottolineare la sua dipendenza da v, con γ_v.

Notiamo che (2.11) determina che la prima colonna di Λ è data da

$$(\gamma, -\gamma\frac{v^1}{c}, -\gamma\frac{v^2}{c}, -\gamma\frac{v^3}{c})^T$$

Utilizzando ulteriormente le equazioni (2.6) si trova che la forma della matrice Λ associata al boost di Lorentz è

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma\frac{v^i}{c} \\ \hline -\gamma\frac{v^i}{c} & \delta_i^j + v^i v^j \frac{\gamma-1}{|\mathbf{v}|^2} \end{array}\right) \tag{2.12}$$

Osservazione. Come avviene nel gruppo di Galileo le matrici della forma (2.12) dipendono dai tre parametri di $\mathbf{v}$. Peraltro, nel gruppo di Lorentz, tali matrici in generale non commutano ($[\Lambda_{v_1}, \Lambda_{v_2}] \neq 0$, né formano un sottogruppo di $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

I boosts di Galileo si ritrovano nel limite $c \to \infty$. Infatti, ricordando che $x'^0 = c\,t'$, $x^0 = c\,t$, la matrice $\widetilde{\Lambda}$ che lega le coordinate (t', x', y', z') alle (t, x, y, z) diventa

$$\widetilde{\Lambda} = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma\frac{v^i}{c^2} \\ \hline -\gamma v^i & \delta_i^j + v^i v^j \frac{\gamma-1}{|\mathbf{v}|^2} \end{array}\right)$$

che, per $c \to \infty$ diventa

$$\widetilde{\Lambda}_{c\to\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v^1 & 1 & 0 & 0 \\ v^2 & 0 & 1 & 0 \\ v^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1 Prime conseguenze

In queste argomentazioni considereremo due osservatori $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ tali che $\mathcal{O}$ veda $\mathcal{O}'$ muoversi con velocità $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$, cioè diretta lungo l'asse x. Detto

$\beta = \dfrac{v}{c}$, la matrice che connette le coordinate relative ai due osservatori sarà dunque

$$\Lambda_{\mathcal{O}',\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ed esplicitamente, si avrà:

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \dfrac{\beta}{c}x) \\ \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{2.13}$$

Contemporaneità. Consideriamo due eventi $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, simultanei rispetto a $\mathcal{O}$, che avvengono in punti diversi dello spazio. In generale sarà:

$$\Delta t (= t_2 - t_1) = 0, \Delta x (= x_2 - x_1) \neq 0.$$

Per $\mathcal{O}'$ avremo, secondo la (2.13)

$$t'_1 - t'_2 = \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x) = -\gamma\frac{\beta}{c}\Delta x \neq 0.$$

Dunque nella teoria della relatività ristretta cade il concetto di contemporaneità "assoluta": eventi contemporanei rispetto ad un osservatore possono non esserlo per un altro osservatore.

Contrazione delle lunghezze. Consideriamo una sbarra $S = \vec{AB}$ solidale al sistema $\mathcal{O}'$, disposta sull'asse $x' \equiv x$, dove x è l'asse delle ascisse di un altro osservatore $\mathcal{O}$, con $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ legati da una trasformazione di Lorentz (2.13). $\mathcal{O}'$ assegna ad S la lunghezza $l_0(S) = x'_A - x'_B$. Ora, dalle (2.13) si ha:

$$l_0(S) = x'_A - x'_B = \gamma(x_A - \beta\, c\, t_A) - \gamma(x_B - \beta, c\, t_B) = \gamma(x_A - x_B) - \gamma\,\beta\, c(t_A - t_B)$$

$\mathcal{O}$ effettuerà (altrimenti non avrebbe senso) la misura della lunghezza di S con $t_B = t_A$, e dunque avrà che

$$l(S) \equiv = x_B - x_A\Big|_{t_B = t_A} = \frac{l_0(S)}{\gamma} > l_0(S) \text{ se } |v| > 0. \tag{2.14}$$

Dunque $\mathcal{O}$, che vede S muoversi, misurerà una lunghezza $l(S)$ inferiore alla lunghezza *a riposo* $l_0(S)$ misurata da quella di un osservatore solidale a S.

Dilatazione degli intervalli di tempo. Supponiamo ora che, per l'osservatore $\mathcal{O}'$ due eventi $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ avvengano nello stesso luogo (in particolare, $x'_1 = x'_2$), a istanti di tempo successivi $t'_2 > t'_1$, in modo tale che $\Delta t' = (t'_2 - t'_1) > 0$.

L'osservatore $\mathcal{O}$, sempre legato a $\mathcal{O}'$ dalla (2.13), assegnerà ad $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ le corripondenti coordinate non "primate"; osserverà che:

1. Per la distanza spaziale tra i due eventi:

$$x_2 - x_1 \equiv \Delta x = \beta\, c\Delta t = v_x \Delta t,$$

cosa usuale anche nella relatività di Galileo.

2. Invece, per la "distanza" temporale, si avrà:

$$\begin{aligned}&\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x) = \text{ dalla relazione sopra } = \\ &\gamma \Delta t(1-\beta^2) = \sqrt{1-\beta^2}\Delta t.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Dunque si avrà

$$\Delta t = \gamma\, \Delta t',$$

ovvero la distanza temporale - misurata da $\mathcal{O}$ che è "in moto" rispetto ad $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, tra i due eventi sarà maggiore di quella misurata da $\mathcal{O}'$, che li vede avvenire nello stesso luogo.

Cioè, se un fenomeno (e.g., il decadimento di particelle radioattive) avviene, misurato da un osservatore in quiete con il fenomeno (e.g., la camera a bolle dove le particelle decadono) con periodo τ_0, lo stesso fenomeno sarà visto avvenire (da un osservatore in moto rispetto al fenomeno) con un periodo

$$\tau_v = \gamma \tau_0 > \tau_0 \text{ se } |v| > 0.$$

Composizione delle velocità Affrontiamo prima il problema ristretto – ma sufficientemente significativo – della composizione di velocità dirette lungo lo stesso asse (che, per fissare le ideem supporremo essere l'asse x), nel quadro delle trasformazioni di Lorentz. Ovvero considereremo tre osservatori $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$, $\mathcal{O}''$ tali che:

- la velocità di $\mathcal{O}'$ rispetto a $\mathcal{O}$ sia $\mathbf{v} = (V, 0, 0)$;
- la velocità di $\mathcal{O}''$ rispetto a $\mathcal{O}'$ sia $\mathbf{w} = (W, 0, 0)$,

e ci chiediamo qual è la velocità che $\mathcal{O}$ assegna a $\mathcal{O}''$.

Tradotto in termini di trasformazioni di Lorentz, il problema si formula (per poi risolverlo ....) nel seguente modo. La matrice (ci limitiamo a considerarre il problema come bidimensionale, nel "piano" (t,x)) che connette due riferimenti inerziali in moto relativo con $\mathbf{V} = (V,0,0)$ (come sono i nostri tre sistemi di riferimento) è data da

$$\Lambda_V = \begin{pmatrix} \cosh(\theta_V) & \sinh(\theta_V) \\ \sinh(\theta_V) & \cosh(\theta_V) \end{pmatrix},$$

dove

$$\tanh(\theta_V) = \frac{V}{c} \tag{2.16}$$

è detta *rapidità*. Dalle assunzioni fatte, la trasformazione che lega $\mathcal{O}''$ a $\mathcal{O}$ si ottiene componendo la trasformazione che lega $\mathcal{O}''$ a $\mathcal{O}'$ – rappresentata da Λ_W – con quella che lega $\mathcal{O}'$ a $\mathcal{O}$, rappresentata da Λ_V. In termini "gruppali", la matrice che rappresenta la trasformazione tra $\mathcal{O}''$ e $\mathcal{O}$, dalla quale ricaveremo la legge di composizione delle velocità $W \star V$, è dunque data dal prodotto delle matrici $\Lambda_W \cdot \Lambda_V$. Utilizzando le formule di addizione degli "archi" iperbolici si ha

$$\Lambda_{W\star V} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta_W + \theta_V) & \sinh(\theta_W + \theta_V) \\ \sinh(\theta_V + \theta_V) & \cosh(\theta_V + \theta_V) \end{pmatrix},$$

da cui, da (2.16)

$$\begin{aligned} &\frac{W \star V}{c} = \tanh(\theta_{W\star V}) = \tanh(\theta_W + \theta_V) = \\ &\frac{\tanh(\theta_V) + \tanh(\theta_W)}{1 + \tanh(\theta_V)\,\tanh(\theta_W)} = \frac{\frac{V}{c} + \frac{W}{c}}{1 + \frac{V}{c}\frac{W}{c}}, \end{aligned}$$

da cui si ha la legge di composizione delle velocità (nel caso semplice in questione) come

$$W \star V = \frac{W + V}{1 + \frac{W\,V}{c^2}}.$$

Definizione 2.2 *Lo spazio affine* $\mathbb{A}^4$ *dotato della struttura pseudoeuclidea* η*, di segnatura* $(1,3)$

$$\begin{aligned} \eta :\ & \mathbb{A}^4 \times \mathbb{A}^4 && \to \ \mathbb{R} \\ & (p,q) && \mapsto \ \eta_{\mu\nu}(x_p^\mu - x_q^\mu)((x_p^\nu - x_q^\nu) = (x_p^0 - x_q^0)^2 - \textstyle\sum_{i=1}^3 (x_p^i - x_q^i)^2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

è detto Spazio-Tempo di Minkowski. *L'insieme delle traformazioni affini che preservano la struttura $\eta_{\mu\nu}$ è il gruppo di Poincaré $\mathcal{P}$. Il sottogruppo di $\mathcal{P}$ celle trasformazioni omogenee – cioè lineari – che preservano l'orientazione spaziale ed il verso del tempo è – detto gruppo di Lorentz stretto o proprio ortocrono $\mathcal{L}_+^\uparrow$.*
La coordinata x^0 assegnata da un osservatore $\mathcal{O}$ ad un evento è legata al tempo (misurato dallo stesso osservatore) in cui l'evento avviene da

$$x^0 = c\,t$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto. c è un invariante scalare per $\mathcal{P}$.

A differenza dello spazio-tempo di Galileo, nello spazio-tempo di Minkowski non risulta definita una nozione di tempo assoluto, nè, dunque, una nozione "invariante" di contemporaneità.

Lo spazio-tempo di Minkowski è dotato peraltro di un'altra struttura, detta struttura *causale*. Fissiamo una origine O in $\mathbb{A}^4$, ed un riferimento cartesiano pseudo-ortogonale (cioè ortogonale rispetto ad η); ad ogni evento $\mathcal{E}$ è associata la quaterna delle sue coordinate

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (c\,t, x^1, x^2, x^3)$$

Valutiamo

$$\eta(x^\mu, x^\mu) = \underbrace{(x^0)^2}_{=c^2\,t^2} - \underbrace{\sum_{i=1}^{3}(x^i)^2}_{=|\mathbf{x}|^2}$$

Dato che η è indefinita, esiste una superficie $\partial\mathcal{C}$ definita da

$$\mathcal{E} \in \partial\mathcal{C} \Leftrightarrow \eta_{\mu,\nu}x^\mu x^\nu = 0, \tag{2.18}$$

ovvero $c\,t = \pm|\mathbf{x}|$. La quadrica è un "ipercono", che suddivide $\mathcal{M}$ in due regioni $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ e $\mathcal{S} = \mathcal{M} \setminus \bar{\mathcal{C}}$, dove $\mathcal{C}$ è l'insieme degli eventi la cui quadri-distanza dall'origine è positiva.

Definizione 2.3 *Diremo un quadrivettore (che rappresenta il quadri-intervallo tra un evento $\mathcal{E}$ e l'evento scelta come origine) $x \in \mathcal{M}$:*

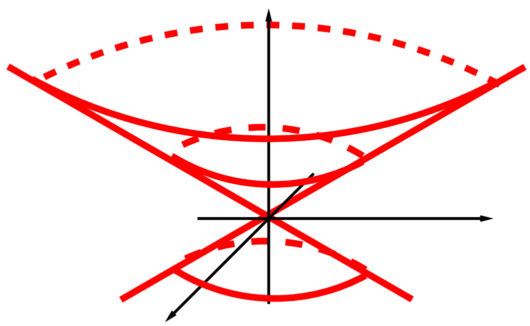
i) *Lightlike (nullo o di tipo luce) $x \in \partial\mathcal{C}$, ovvero se $\eta_{\mu,\nu}x^\mu x^\nu = 0$.*

ii) *Timelike (di tipo tempo) se $x \in \mathcal{C}$, ovvero $\eta_{\mu,\nu}x^\mu x^\nu > 0$.*

iii) *Spacelike (di tipo spazio) se* $x \in \mathcal{S}$*, ovvero* $\eta_{\mu,\nu} x^\mu x^\nu < 0$.

Graficamente si ha, sopprimendo una delle dimensioni spaziali, la seguente figura:

Figure 1: Il cono luce



Il significato fisico della partizione dell'insieme degli eventi in questi tre sottovarietà è il seguente: Supponiamo che x sia lightlike, ovvero $\eta_{\mu,\nu} x^\mu x^\nu = 0$. Questo significa che le sue coordinate spazio-temporali soddisfano la relazione

$$|\mathbf{x}|^2 = c^2\, t^2. \tag{2.19}$$

Questa è l'equazione di un fronte d'onda che esce da $\mathcal{O}$ a $t = 0$ e si propaga con velocità c. Dunque, $\partial \mathcal{C}$ è il luogo degli eventi connessi a $\mathcal{O}$ da segnali luminosi (o meglio, da onde elettromagnetiche).

Se $\eta_{\mu,\nu} x^\mu x^\nu > 0$, cioè se x è timelike, allora si ha, in analogia con la (2.19), la relazione

$$|\mathbf{x}|^2 < c^2\, t^2 \Leftrightarrow \frac{|\mathbf{x}|^2}{t^2} < c^2 \tag{2.20}$$

Dunque la velocità (misurata da $\mathcal{O}$) di un moto uniforme che connette $\mathcal{O}$ ad $\mathcal{E}$ è minore di c, e dunque ammissibile. Anche in questo caso $\mathcal{E}$ può essere "influenzato" da $\mathcal{O}$ in maniera causale (se $t > 0$), o viceversa se $t < 0$. In questo caso diremo che $\mathcal{O}$ e $\mathcal{E}$ sono causalmente connessi. Si può dimostrare che se due eventi cono causalmente connessi, l'accadere prima o dopo è invariante rispetto al gruppo di Lorentz $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Da qui la suddivisione di $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}^+$ (Futuro) e $\mathcal{C}^-$ (Passato).

Infine, se x è spacelike, l'evento $\mathcal{E}$ non può essere in alcun modo influenzato da $\mathcal{O}$, e viceversa. Inoltre, si può anche dimostrare che esistono due osservatori inerziali per i quali l'ordine temporale tra $\mathcal{O}$ e $\mathcal{E}$ risulta invertito.

Esercizio Verificare le affermazioni qui sopra nel caso di trasformazioni di Lorentz del tipo (2.13). Ovvero, considerare due eventi di coordinate (t_A, x_A) e (t_B, x_B) (misurate da un osservatore $\mathcal{O}$) con $t_A > t_B$, e verificare (posto, per semplicità, $x_A > x_B$), che:

1. se $c^2(t_A - t_B)^2 - (x_B - x_B)^2 < 0$ è possibile trovare (almeno) un osservatore $\mathcal{O}'$ (che assegnerà agli stessi eventi coordinate $(t'_A, x'_A), (t'_B, x'_B)$ legate alle coordinate non primate da una trasformazione del tipo (2.13)) per il quale $t'_A < t'_B$.

2. se $c^2(t_A - t_B)^2 - (x_B - x_B)^2 > 0$ per tutti gli osservatori $\mathcal{O}'$ legati ad $\mathcal{O}$ da una trasformazione di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ vale $t'_A > t'_B$.

2.2 Trasformazioni di Lorentz infinitesime

Consideriamo una famiglia ad un parametro di matrici del gruppo di Lorentz, ovvero una famiglia

$$\Lambda(u) \quad \text{tali che } \Lambda^T(u)\eta\Lambda(u) = \eta, \tag{2.21}$$

con $u \in \mathbb{R}$ (o eventualmente, $u \in (-\epsilon, \epsilon)$, tali che $\Lambda(0) = \mathbf{1}$, con $\Lambda(u)$ di classe almeno $\mathcal{C}^2$. Osserviamo che, chiamata $M := \frac{d}{du}\Lambda(u)|_{u=0}$ vale, per u piccoli, che

$$\Lambda(u) = \mathbf{1} + u\, M + \mathrm{o}(u).$$

Chiameremo la parte lineare $\mathbf{1} + uM$ di tale relazione una trasformazione di Lorentz infinitesima associata alla matrice M.

Geometricamente, l'insieme delle matrici M forma lo spazio tangente nel punto $\mathbf{1}$ all'insieme (alla ipersuperficie) delle matrici di Lorentz, che deve essere pensato come un sottoinsieme (sottovarietà) dello spazio delle matrici 4×4 invertibili. Tale spazio tangente, nella teoria dei gruppi di Lie, è chiamato *algebra di Lie* associata al gruppo (o del gruppo) di Lie.

Possiamo caratterizzare l'insieme di tali matrici M osservando che derivando la relazione (2.21) in $u = 0$ otteniamo la seguente equazione per M:

$$M^T \cdot \eta + \eta \cdot M = \mathbf{0}. \tag{2.22}$$

La soluzione generale di questa equazione dipende da 6 parametri, e si scrive come

$$M = \begin{pmatrix} 0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ w_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ w_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{w}^T \\ \hline & \\ \mathbf{w} & \Omega \\ & \end{array}\right). \tag{2.23}$$

Nella seconda relazione abbiamo usato la decomposizione ormai solita delle metrici di Lorentz a blocchi, e denotato con Ω la matrice antisimmetrica

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

La presenza, nel blocco 3×3 in "basso a destra" della matrice antisimmetrica Ω non sorprende: infatti corrisponde all'imersione del gruppo $SO(3) \mapsto \mathcal{L}_+^\uparrow$ discusso in precedenza. Più importante è la discussione del significato dei parametri (w_1, w_2, w_3) che corrispondono, come non è difficile vedere, a boosts di Lorentz infinitesimi.

Definizione 2.4 *L'esponenziale di una matrice $M \in Mat(n,\mathbb{R})$ si definisce attraverso la formula*

$$\exp M = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}. \tag{2.24}$$

Proposizione 2.5 *La serie (2.24) è assolutamente convergente.*

La dimostrazione di questa proposizione si basa sul fatto lo spazio delle matrici si può dotare di norme "submotiplicative", ovvero norme che soddisfano la relazione

$$||A\cdot B|| \le ||A||\,||B||,\ \forall\, A, B \in Mat(n,\mathbb{R}). \tag{2.25}$$

Ad esempio, la norma operatoriale, definita da

$$||A||_O = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}, \tag{2.26}$$

o la norma (talvolta detta anche di Hilbert-Schmidt), definita da

$$||A||_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^\mathrm{T}\,\mathrm{A})} \tag{2.27}$$

soddisfano tale proprietà.

Notiamo che $||A||_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$, ed essa è è la norma naturalmente indotta su $Mat(n,\mathbb{R})$ dall'isomorfismo lineare $Mat(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$; $||\cdot||_2||$ deriva dal prodotto scalare

$$(A, B) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{B}).$$

Esercizio Dimostrare che (2.26) definisce una norma submoltiplicativa in $Mat(n,\mathbb{R})$,

Esercizio Lo stesso per (2.27).

Dimostrazione (della proposizione 2.5). Consideriamo ora la serie (2.24) e sia $|| \cdot ||$ submoltiplicativa. Abbiamo

$$||\sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}|| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{||M^n||}{n!} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{||M||^n}{n!}, \tag{2.28}$$

dove la submoltiplicatività (2.25) è stata usata nel secondo passo, mentre nella prima abbiamo usato la disuguaglianza triangolare. Ora,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{||M||^n}{n!} = \exp(||M||),$$

il che conclude la dimostrazione.

Esercizio. Mostrare che valgono le relazioni:

1. $(\exp(M))^T = \exp(M^T)$.
2. $\mathrm{Det}(\exp(M)) = \exp(\mathrm{Tr}(M))$. (È sufficiente[7] mostrare questa relazione per matrici diagonalizzabili sui complessi.
3. $(\exp(M))^{-1} = \exp(-M)$.
4. Se M soddisfa $M^T\eta + \eta M = \mathbf{0}$, allora $\exp(M)$ appartiene ad $\mathcal{L}_+^\uparrow$, ovvero $(\exp(M))^T \eta \exp(M) = \eta$.

Consideriamo ora una matrice della forma (2.23) della forma

$$M_{w_1} := \begin{pmatrix} 0 & w_1 & 0 & 0 \\ w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[7] Perché?

Dette $\mathbf{1}$ la matrice identica 4×4, e P_{01} il proiettore sul sottospazio generato da x^0 e x^1, ovvero,

$$P_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si hanno:

$$M_{w_1}^0 = \mathbf{1},\ M_{w_1}^2 = w_1^2 P_{01},\ M_{w_1}^3 = w_1^3 M_1, \ldots,$$

con

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In generale, per $n \geq 1$

$$M_{w_1}^{2n} = (w_1)^{2n} P_{01}, \quad M_{w_1}^{2n-1} = (w_1)^{2n-1} M_1. \tag{2.29}$$

Dunque abbiamo

$$\exp(M_{w_1}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M_{w_1}^n}{n!} = \mathbf{1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M_{w_1}^n}{n!} = \mathbf{1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M_{w_1}^{2n}}{(2n)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M_{w_1}^{2n-1}}{(2n-1)!}, \tag{2.30}$$

dove, nell'ultimo passaggio si usa il fatto che le serie che convergono assolutamente sono anche "incondizionatamente convergenti", cioè i termini si possono sommare in qualsivoglia ordine senza alterare la somma della serie.

Utilizzando (2.29) otteniamo

$$\mathbf{1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M_{w_1}^{2n}}{(2n)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M_{w_1}^{2n-1}}{(2n-1)!} = \mathbf{1} + (\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{{w_1}^{2n}}{(2n)!}}_{=\cosh(w_1)-1}) P_{01} + (\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{{w_1}^{2n-1}}{(2n-1)!}}_{=\sinh w_1}) M_1,$$

e dunque otteniamo

$$\exp M_{w_1} = \mathbf{1} + (\cosh(w_1) - 1) P_{01} + \sinh(w_1) M_1 = \begin{pmatrix} \cosh(w_1) & \sinh(w_1) & 0 & 0 \\ \sinh(w_1) & \cosh(w_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

ovvero è la matrice che rappresenta (nella parametrizzazione della rapidità $\tanh w_1 = -\frac{v}{c}$) un boost lungo l'asse x^1.

Esercizio.

1. Verificare che, dette

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{e } M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   e $M_{w_2} = w_2 M_2, M_{w_3} = w_3 M_3$, si ha:

$$\begin{aligned} \exp(M_{w_2}) &= \begin{pmatrix} \cosh w_2 & 0 & \sinh w_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh w_2 & 0 & \cos w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \\ \exp(M_{w_3}) &= \begin{pmatrix} \cosh w_3 & 0 & 0 & \sinh w_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh w_3 & 0 & 0 & \cos w_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

2. Utilizzando il punto 1, verificare che, per $w_i \neq 0$,,

$$\exp(M_{w_i}) \exp(M_{w_k}) - \exp(M_{w_k}) \exp(M_{w_i}) \neq \mathbf{0} \ \text{ per } i \neq k.$$

3. Verificare che il polinomio di McLaurin del secondo ordine del commutatore di, e.g., $[\exp(M_{w_1}), \exp(M_{w_2})]$ è dato dalla matrice

$$\Omega_3 = w_1 w_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   ovvero che – a parole – il commutatore di due boosts infinitesimi di Lorentz, uno rispetto all'asse x^1 e l'altro rispetto all'asse x^2 è una rotazione infinitesima rispetto all'asse x^3.

4. Generalizzare il risultato precedente al caso generale, cioè determinare lo sviluppo al secondo ordine di $[\exp(M_{w_i}), \exp(M_{w_k})]$, $i > k$.

2.3 Cinematica relativistica

Diremo *moto* un insieme ordinato di eventi causalmente connessi. Ovvero, considerata una curva $\Gamma : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ di classe $\mathcal{C}^2$ definita da

$$\lambda \mapsto \Gamma(\lambda) = x^\mu(\lambda), \qquad \text{con } \lambda \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}.$$

Richiederemo che, $\forall \lambda \in \mathcal{I}$ il vettore tangente a Γ in λ

$$\left(\frac{dx^0}{d\lambda}, \cdots, \frac{dx^3}{d\lambda}\right) \tag{2.33}$$

non sia spacelike. In questo modo, stiamo richiedendo che Γ possa rappresentare un moto fisico. La condizione (2.33) dice che in ogni punto $P(\lambda) = x^\mu(\lambda)$, il vettore tangente alla curva non esce dal lightcone centrato in P. Si dice anche che un moto è una curva causale.

Definizione 2.6 *Una particella è una coppia* (Γ, m_0) *dove* Γ *è un moto (cioè il vettore tangente a* Γ *non è mai spacelike), e* m_0 *è un numero reale non negativo* $m_0 \geq 0$*), detto massa a riposo della particella.*

Nel caso $m_0 > 0$, (il caso di $m_0 = 0$ verrà caratterizzato più oltre) m_0 è l'usuale massa di una particella Newtoniana (o Galileiana), misurata da un osservatore per il quale la particella è a riposo.

Velocità Per definire la velocità di una particella (che deve essere un quadrivettore, cioè una quaterna che si trasforma come un vettore della differenza delle coordiante di due eventi rispetto a trasformazioni di Lorentz), dobbiamo individuare un parametro che possa giocare il ruolo che il tempo assoluto della relatività di Galileo gioca nella definizione usuale di velocità. Consideriamo dunque un moto, e due punti/eventi su du esso (arbitrariamente vicini), ovvero

$$x^\mu(\lambda), \text{ e } x^\mu(\lambda + d\lambda) = x^\mu(\lambda) + dx^\mu.$$

Per due riferimenti $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ vale

$$ds^2 = (c\,dt)^2 - \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2 = (c\,dt')^2 - \sum_{i=1}^{3}(dx'^i)^2$$

Se la curva è timelike, la forma quadratica ds^2 è definita positiva, ed è un invariante scalare. Definiamo

$$d\tau = \sqrt{d\,t^2 - \frac{\sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2}{c^2}} = \frac{ds}{c} \tag{2.34}$$

l'intervallo (in questo caso, infinitesimo) di *tempo proprio* della particella. L'intervallo di tempo proprio è un invariante scalare, perchè (radice del) rapporto di due invarianti, ds^2 e c^2. Se la curva é sempre timelike, e dunque rappresenta il moto di una particella, notiamo che $d\tau$ 'e sempre positivo. Possiamo chiamare *tempo proprio* l'integrale

$$\tau(\lambda) = \int_0^\lambda d\tau(\lambda')$$

di questa quantità. Notiamo che il tempo proprio è una funzione monotona[8]. Il significato fisico dell'intervallo di tempo proprio (o meglio del suo differenziale $d\tau$) si evince considerando un sistema $\mathcal{O}^*$ istantaneamente solidale con la particella. Allora per $\mathcal{O}^*$ si ha

$$ds^2 = (cdt^*)^2, \Rightarrow d\tau = dt^*.$$

Cioè, l'intervallo di tempo proprio è l'intervallo di tempo misurato da un sistema di riferimento istantanemento solidale (o comovente) con la particella.

Peraltro, il significato di intervallo di tempo proprio (e dunque, anche di tempo proprio) è vicino a quello intuitivo di tempo "galileiano" solo per particelle strettamente timelike. Infatti, se considero una particella lightlike, $ds^2 = 0$ e dunque $d\tau = 0$. In questo senso, si dice che una particella lightlike è acronale.

L'interpretazione data qui sopra di intervallo di tempo proprio è operativa. Infatti, si è detto che $d\tau = dt^*$, dove t^* è il tempo misurato da un osservatore inerziale istantaneamente comovente con la particella. In ogni altro sistema di riferimento,

$$d\tau^2 = dt^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\left|\frac{dx^i}{dt}\right|^2\right) = dt^2(1 - (\frac{|\mathbf{v}|}{c})^2) = dt^2(1-\beta_v^2), \tag{2.35}$$

dove $|\mathbf{v}|$ è la (3)–velocità che l'osservatore in questione assegna alla particella. Dunque

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma_v}. \tag{2.36}$$

[8] In effetti, non faremo mai uso del *tempo proprio* τ, quanto del suo differenziale $d\tau$

A questo punto possiamo dare la seguente

Definizione 2.7 *Sia $x^\mu(\lambda)$ una curva $\mathcal{C}^2$ non spacelike nello spazio degli eventi $\mathcal{M}$. Il vettore quadrivelocià u^μ di una particella è dato da $u^\mu = \dfrac{d\,x^\mu}{d\tau}$.*

Più esplicitamente si ha che, per ogni osservatore, la scomposizione del quadrivettore u^μ nella "componente temporale" e in quelle spaziali è data da

$$u^\mu = (\frac{d\,ct}{d\tau}, \frac{dx^i}{d\tau}) = (\gamma_v\, c, \gamma_v v^i),\ (v_i = \frac{dx^i}{dt}). \tag{2.37}$$

Esplicitamente, $\mathbf{v}$ è il trivettore velocità della particella misurata dall'osservatore in questione.

Osservazioni .

1. La quadrivelocità è un 4-vettore. Infatti è il (limite del) rapporto tra un vettore dx^μ e lo scalare (di Lorentz) $d\tau$.

2. Le componenti "spaziali" (v^1, v^2, v^3) della quadrivelocità u^μ tendono, per $c \to \infty$ – e dunque per una particella la cui velocità sia trascurabile rispetto a quella della luce, alle usuali componenti del (tri)-vettore velocità della cinematica Newtoniana.

3. Se la particella è lightlike, si può utilizzare la parte significativa della seconda delle relazioni (2.37) per definire la sua quadrivelocità come un 4-vettore (ν^0, ν^i) dove $\nu^0 = c, |\boldsymbol{\nu}| = c$.

4. La quadrivelocità di una particella "ha solo 3 componenti libere" (come nel caso Galileiano). Consideriamo

$$\begin{aligned} &\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = (u^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(u^i)^2 = \\ &\gamma^2\, c^2 - \gamma^2|\mathbf{v}|^2 = \gamma^2\, c^2\,(1-\beta^2) = c^2, \end{aligned} \tag{2.38}$$

   dato che $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Quindi il prodotto pseudoeuclideo di u^μ con se stesso è (sempre nel caso di particelle strettamente timelike) pari alla velocità della luce al quadrato e dunque è una costante. La conslusione, mutatis mutandis, vale anche per particelle lightlike (cioè i "fotoni"). Infatti, per queste, $\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0$ identicamente.

Definiamo 4-accelerazione di una particella il 4-vettore

$$a^\mu = \frac{d\,u^\mu}{d\tau} = \frac{d^2\,x^\mu}{d\tau^2}. \tag{2.39}$$

Osserviamo che qui e prima, abbiamo sostanzialmente interpretato il tempo proprio τ come parametro opportuno per la descrizione del moto.

Proposizione 2.8 *I quadrivettori velocità ed accelerazione di una particella timelike - sono ortogonali rispetto alla pseudometrica di Minkowski.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $\eta_{\mu,\nu}u^\mu a^\nu = 0$. Abbiamo

$$\eta_{\mu,\nu}u^\mu a^\nu = \eta_{\mu\nu}u^\mu\,\frac{d\,u^\nu}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(\eta_{\mu,\nu}u^\mu u^\nu) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(c^2) = 0,$$

dove la seconda uguaglianza – che è quella cruciale – segue dalla simmetria della forma $\eta_{\mu,\nu}$.

3 Dinamica relativistica

Consideriamo una particella (timelike) $(m_0, x^\mu(s))$ e la sua quadrivelocità $u^\mu = (\gamma c, \gamma\mathbf{v})$. Definiamo 4-vettore *energia–impulso* (o anche "energia–quantità di moto") il vettore

$$p^\mu = m_0 u^\mu = (m_0\gamma c, m_0\gamma\mathbf{v})$$

dove ricordiamo che m_0 è la massa a riposo della particella. Le componenti spaziali $m_0\gamma\mathbf{v}$ acquisiscono la forma più familiare $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ se si definisce la massa tout court - che però diventa una funzione di $|\mathbf{v}|$ come

$$m = m(|\mathbf{v}|) = m_0\gamma_v. \tag{3.1}$$

p^μ è, per definizione, un 4-vettore. Dalla formula (2.38) otteniamo

$$\eta_{\mu,\nu}p^\mu p^\nu = m_0^2 c^2.$$

In analogia con il caso Newtoniano, scriveremo le equazioni di moto come

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu. \tag{3.2}$$

Data una linea di universo, queste equazioni *definiscono* il 4-vettore K^μ. Peraltro, nella dinamica si è interessati al problema di ottenere le equazioni del moto per la particella, a partire da una espressione del lato destro di questa equazione, che si suppone di poter determinare a priori.

Noi non discuteremo qui in modo esaustivo le condizioni che deve soddisfare K^μ; peraltro possiamo subito osservare che K^μ è un quadrivettore che, in virtù della sua definizioe e della Proposizione 2.8 deve soddisfare la relazione

$$\eta_{\mu,\nu} K^\mu u^\nu = 0. \tag{3.3}$$

Questa si evince dal fatto che

$$\eta_{\mu,\nu} K^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{dp^\mu}{d\tau} u^\nu = m_0 \eta_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{d\tau} u^\nu = 0.$$

Proposizione 3.1 *Una particella libera (cioè una per la quale $K^\mu = 0$) si muove di moto rettilineo uniforme, ovvero, per un osservatore inerziale $\mathbf{v} =$ costante.*

Dim. Dalla formula $dt = \gamma d\tau$ otteniamo

$$\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}.$$

Scindiamo ora le equazioni (quadrivettoriali) $\dfrac{dp^\mu}{d\tau} = 0$ nella componente temporale e in quelle spaziali - ricordando che $p^\mu = (m_0 \gamma c, m_0 \gamma \mathbf{v})$ come

$$\begin{cases} \text{temporale:} \quad \gamma \dfrac{d}{dt}(m_0 \gamma c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\gamma}{dt} = 0 \\ \text{spaziale: :} \quad \gamma \dfrac{d}{dt}(m_0 \gamma \mathbf{v}) \quad \Rightarrow \quad m_0 \big(\dfrac{d\gamma}{dt} \mathbf{v} + \gamma \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} \big) = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Dalla prima abbiamo che γ è costante, e sostituendo nella seconda otteniamo la tesi.

Scriviamo le equazioni di Einstein-Newton in componenti, osservando che

$$dt = \gamma d\tau \Rightarrow \frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$$

La componente temporale dà:

$$\gamma\frac{d}{dt}(m_0\gamma c) = K^0 \tag{3.5}$$

mentre le per le componenti spaziali si ha

$$\begin{aligned}
&\gamma\frac{d}{dt}(m_0\gamma v^i) = K^i, \text{ ovvero} \\
&\frac{d}{dt}(m_0\gamma v^i) = \frac{K^i}{\gamma}
\end{aligned}$$

Diremo le quantità $f^i = \dfrac{K^i}{\gamma}$ *forze agenti*. Dalla (3.3) si ha

$$\begin{aligned}
&K^\mu u_\mu = K^0 u^0 - \sum_i K^i u^i = 0, \\
&\Rightarrow K^0\gamma c = \gamma\sum_i f^i\gamma v^i \\
&\Rightarrow \frac{cK^0}{\gamma} = \sum_i f^i v^i = \Pi.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ovvero, si può riscrivere la (3.5) come

$$\frac{du^0}{dt} = \frac{\Pi}{c},$$

dove Π è la ordinaria potenza della forza, e individuare le componenti del quadrivettore *potenza-forza* come

$$(\gamma\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}}{c}, \gamma\mathbf{f}). \tag{3.7}$$

Diremo che se la particella ha quadrivettore energia-impulso p^μ non costante ripetto al tempo proprio τ, allora esiste un quadrivettore K^μ tale che

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu,$$

ovvero che "assorbe energia e momento", cioè dà conto della interazione tra la particella e l'ambiente. Questo quadrivettore, pensato come funzione delle

variabili spaziali, dovrà avere una opportuna dipendenza dalle stesse per essere un quadrivettore. Per esempio, la forza di gravità non dà origine ad unn quadrivettore. Peraltro, vedremo/giustificheremo che le forze elettromagnetiche sono opportunamente descritte nel formalismo di Einstein (ciò è del tutto naturale).

Continuiamo ad esaminare le relazioni (3.2), in termini del quadrivettore energia-impulso. Si ha, da

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} \to \begin{cases} \gamma \frac{dp^0}{dt} = \frac{\gamma}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{f} \\ \\ \gamma \frac{dp^i}{dt} = \gamma f^i \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m_0\gamma c^2) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{f} \\ \\ \frac{d}{dt}p^i = f^i, \text{ cioè } \frac{d}{dt}(m_0\gamma\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{v} = \mathbf{f} \end{cases}$$

Chiamando *massa* della particella la quantità $m = m_0\gamma$ osserviamo che le equazioni per le componenti spaziali possono essere messe nella forma usuale di Newton,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}.$$

L'equazione per la componente temporale è forse più interessante. Abbiamo che

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma c^2) = \Pi.$$

Nella meccanica Newtoniana si ha che la potenza di una forza è la derivata temporale dell'energia *cinetica* di una particella. Nella meccanica relativistica, vediamo che la "potenza" è la derivata temporale dell'energia $E = m_0\gamma c^2$.[9] In generale chiamiamo energia della particella la quantità

$$E = p^0 c = m_0 c^2 + \mathcal{T},$$

dove con $\mathcal{T}$ abbiamo indicato la energia cinetica relativistica,

$$\mathcal{T} = E - \lim_{v\to 0} E = m_0^2 c^2(\gamma - 1).$$

[9]Da cui la formula "popolare" $E = mc^2$....

Osserviamo che nel limite $|\mathbf{v}|/c << 1$, $\gamma - 1$ è $\frac{1}{2}|v|^2/c^2$, e dunque $\mathcal{T}$ diventa la ordinaria energia cinetica. Dalla definizione di quadrivettore energia impulso, $p^\mu = m_0 u^\mu$ otteniamo la relazione fondamentale

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 (\text{ costante }). \tag{3.8}$$

"Particella" lightlike Per una particella lightlike $d\tau = 0$. Quindi non possiamo usare il tempo proprio per parametrizzare il moto. Rispetto ad un paramentro (monotono) λ che parametrizza il moto si ha $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\lambda}$ con (la particella è lightlike),

$$u^\mu u_\mu = 0.$$

Dunque, rispetto ad un osservatore inerziale,

$$u^\mu = (\frac{dx^0}{d\lambda}, \frac{dx^i}{d\lambda}) = \frac{dx^0}{d\lambda}(1, \frac{d\lambda}{dx^0}\frac{dx^i}{d\lambda}) = c\frac{dt}{d\lambda}(1, \frac{1}{c}v^i).$$

Dunque l'equazione $u^\mu u_\mu = 0$ dà

$$c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 (1 - \frac{|v|^2}{c^2}) = 0$$

e dunque la particella viaggia alla velocità della luce c. Sempre dalla stessa equazione, si osserva che la massa a riposo di una particella lightlike (fotone) è nulla.

3.1 Applicazione: l'effetto Compton

Consideriamo un urto elastico tra una particella che si muove alla velocità della luce (che chiameremo fotone) ed un elettrone, visto dal sistema di riferimento in cui inizialmente l'elettrone è a riposo. Conserviamo dunque il quadrivettore ,omento-energia totale. prima dell'urto si ha

$$p^\mu_{(f)} = (a, a, 0, 0), \quad p^\mu_{(e)} = (m_0 c, 0, 0, 0). \tag{3.9}$$

Dopo, si avrà - con una scelta "smart" degli assi spaziali,

$$p'^\mu_{(f)} = (a', a'\cos(\vartheta), a'\sin(\vartheta), 0), \quad p'^\mu_{(e)} = (\frac{\mathcal{E}}{c}, p\cos(\varphi), -p'\sin(\varphi), 0) \tag{3.10}$$

La conservazione del quadrivettore Energia–impulso, ovvero $p^{\mu}_{(f)} + p^{\mu}_{(e)} = p'^{\mu}_{(f)} + p'^{\mu}_{(e)}$ dà luogo alle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} a + m_0 c = a' + \dfrac{\mathcal{E}}{c} \\ a = a' \cos(\vartheta) + p \cos(\varphi) \\ 0 = a' \sin(\vartheta) - p' \sin(\varphi). \end{cases} \tag{3.11}$$

Dalla prima ho

$$\mathcal{E} - m_0 c^2 = c(a - a') \tag{3.12}$$

ovvero che l'energia cinetica acquistata dall'elettrone è pari all'energia ceduta dal fotone. Consideriamo ora le equazioni di (3.11) relative alle componenti spaziali, scritte nella forma

$$\begin{cases} a - a' \cos(\vartheta) = p \cos(\varphi) \\ a' \sin(\vartheta) = p' \sin(\varphi). \end{cases}$$

Quadrando e sommando termine a termine si ottiene la relazione

$$a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(\vartheta) = p^2. \tag{3.13}$$

Ma, dalla relazione fondamentale $\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2$, tenuto conto della (3.12) si vede che questa equazione dà luogo a

$$aa'(1 - \cos(\vartheta)) = m_0 c^2 (a - a'), \tag{3.14}$$

e dunque

$$\frac{1 - \cos(\vartheta)}{m_0 c^2} = \frac{a - a'}{aa'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a} \tag{3.15}$$

Dalla formula di Planck sappiamo che, dato che il prodotto ca rappresenta l'energia del fotone, vale

$$a = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{c\lambda}$$

e dunque la formula (3.15) si legge come

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos(\vartheta)). \tag{3.16}$$

Questa formula dice che la variazione di lunghezza d'onda della luce che incide su un elettrone dipende dall'angolo di deflessione dello stesso. Questo è il cosiddetto *effetto Compton*.

4 Forze di natura elettromagnetica

Prima di discutere (alcuni aspetti de) la forza di Lorentz ed il campo elettromagnetico nel quadro della relatività speciale, conviene riconsiderare ed ampliare le nostre nozioni sulla geometria delle spazio di Minkowski.

4.1 Approfondimenti sulla geometria delle trasformazioni di Lorentz

Ricordiamo che la grandezza principale è la metrica pseudoeuclidea

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

e la equazione che caratterizza le trasformazioni di Lorentz Λ la equazione

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Leftrightarrow \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}.$$

Ricordiamo che, dato un quadrivettore x^μ che rappresenta le coordinate di un evento rispetto ad un osservatore inerziale l'equazione caratteristica qui sopra implica che, se x'^ν rappresenta le coordinate dello stesso evento per un altro osservatore $\mathcal{O}'$, allora vale che

$$(x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2 = x^\nu \eta_{\mu\nu} x^\nu = (x'^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x'^i)^2 = x[^\nu \eta_{\mu\nu} x'^\nu = \tag{4.2}$$

In completa analogia con il caso Galileiano, diremo quadrivettore (rispetto alle trasformazioni di Lorentz) come una quaterna A^μ che trasforma (appunto sotto trasformazioni caratterizzate da $\Lambda^\mu{}_\nu$ come

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \tag{4.3}$$

dove abbiamo usato la convenzione di Einstein di somma rispetto all'indice ripetuto. Si dice anche che la quaterna A^μ trasforma come (oppure più semplicemente, *è*) un *quadrivettore controvariante*. Cioè le componenti di un vettore controvariante trasformano come quelle del vettore "intervallo spazio-temporale tra due eventi".

Osserviamo che, anche se le trasformazioni di Lorentz sono state introdotte come quelle che preservano la pseudonorma $x^\nu \eta_{\mu\nu} x^\nu$ di un quadrivettore, in effetti, esse conservano, dati due quadrivettori x^μ e y^μ il loro "pseudo" prodotto scalare (detto anche prodotto scalare di Lorentz o Minkowski), ovvero la quantità

$$x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu. \tag{4.4}$$

Osserviamo che a partire dal quadrivettore controvariante x^μ, definiamo un quadrivettore "con l'indice in basso" tramite la seguente formula:

$$x_\mu = x^\nu \eta_{\nu\mu} (= \eta_{\mu\nu} x^\nu), \tag{4.5}$$

ovvero, in termini matriciali,

$$x_\mu = \eta \cdot x^\mu \tag{4.6}$$

In questo modo, da (4.5) si vede che lo pseudo-prodotto scalare di Lorentz tra x^μ e y^ν è dato dalla formula

$$x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu = x_\mu y^\mu. \tag{4.7}$$

Determiniamo ora la legge di trasformazione delle quaterne x_μ.

Dato x^μ, sappiamo che, in un altro riferimento inerziale, si ha

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \text{ (matricialmente) } X' = \Lambda X,$$

dove con X abbiamo indicato la quaterna x^μ. Ora si avrà

$$x'_\mu = \eta_{\mu\nu} x'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho. \tag{4.8}$$

A livello matriciale, dette ξ e ξ' le quaterne che rappresentano x_μ e x'_μ (e dette X e X' quelle che rappresentano i corrispondenti vettori controvarianti, come sopra) questa relazione si traduce in

$$\xi' = \eta \Lambda X = \eta \Lambda \eta \xi, \tag{4.9}$$

tenuto conto che $\eta^2 = \mathbf{1}$, e la relazione (4.5). Otteniamo dunque che la legge di trasformazione tra x'_μ e x_μ è data dalla matrice

$$\Lambda' = \eta \Lambda \eta.$$

Ora, dalla relazione di Lorentz $\Lambda^T \eta\Lambda = \eta$, moltiplicando (e.g., a destra) per η otteniamo

$$\Lambda^T \underbrace{\eta\Lambda\eta}_{=\Lambda'} = \mathbf{1}, \qquad \text{cioè } \eta\Lambda\eta = (\Lambda^T)^{-1}.$$

Dunque possiamo concludere che la legge di trasformazione (4.9) dice che le quaterne x_μ trasformano secondo la trasposta dell'inversa della trasformazione dei vettori (controvarianti), e dunque sono "covettori) o vettori covarianti. Si dice anche che x_μè la forma covariante del quadrivettore x^μ. Inoltre, menzioniamo che se $\eta_{\mu\,\nu}$ è la matrice di Lorentz, la sua inversa deve essere considerata "con gli indici in alto", e la relazione $\eta^{-1} \cdot \eta = \eta \cdot \eta^{-1} = \mathbf{1}$ si scrive – conformemente alla regola di somma di Einstein – come

$$\eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \eta_{\nu\rho}\eta^{\rho\mu} = \delta^\mu_\nu. \tag{4.10}$$

Quanto sopra ammette una interpretazione naturale nel quadro dell'algebra lineare degli spazi dotati di una forma quadratica non degenere ancorché non necessaramente positiva definita, ma non ci soffermeremo su questo fatto.

Sempre grazie alla non-degenerazione del prodotto pseudo-scalare, possiamo, dato un 4-vettore covariante α, *alzare* il suo indice - e considerarne le cue componenti controvarianti. Ovviamente per fare ciò si deve utilizzare la matrice inversa delle η, che è, come elementi, uguale ad η, ma deve essere considerata come una matrice con entrambi gli indici in alto:

$$\eta^{-1} \equiv \eta^{\mu,\nu},\ \eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu.$$

Dato un 4-vettore covariante α_μ, la sua forma controvariane è dunque data da

$$A^\mu = \eta^{\mu\nu}\alpha_\nu = (\alpha_0, -\alpha_i).$$

Supponiamo ora di avere due vettori (e.g., controvarianti) A^μ e B^ν. Sappiamo che il prodotto pseudoscalare $\eta_{\mu\nu}A^\mu B^\nu = A_\nu B^\nu$ è uno "scalare" di Lorentz. Peraltro, da A e B possiamo formare la "matrice" 4×4 G di componenti

$$G^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$$

Data una trasformazione di Lorentz, si avrà $A^\mu \to A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\sigma A^\sigma$, $B^\nu \to B'^\nu = \Lambda^\nu{}_\rho B^\rho$, e dunque

$$G^{\mu,\nu} \to G'^{\mu,\nu} = A'^\mu B'^\nu = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho A^\sigma B^\rho = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho G^{\rho\sigma}, \tag{4.11}$$

o, in termini matriciali, $G \to G' = \Lambda G \Lambda^T$, come è facile vedere.

Definizione 4.1 *Chiameremo un oggetto a due indici $G^{\mu,\nu}$ che trasformi come (4.11) un* tensore di rango 2 *completamente controvariante. Dato un tensore siffatto, $G^{\mu\nu}$, si possono considerare anche la sua forma completamente covariante, ottenuta abbassando entrambi gli indici come*

$$G_{\mu,\nu} = \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}G^{\sigma\rho},$$

ed anche le sue forme miste

$$G^{\mu}{}_{\nu} = G^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu}, \qquad G_{\mu}{}^{\nu} = \eta_{\mu\rho}G^{\rho\nu}.$$

Osservazione. Si può parlare di simmetria o antisimmetria solo per le forme completamente covarianti o completamente controvarianti dei tensori.

Per finire, osserviamo la seguente proprietà. Supponiamo di avere un campo scalare $\Phi(x)$, e di considerare il suo gradiente

$$\mathrm{grad}(\Phi) = (\frac{\partial\Phi}{\partial x^0}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^3}), \text{ denotato con } \partial_\mu\Phi.$$

Operando una trasformazione di Lorentz $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ abbiamo

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\Phi}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\Phi}{\partial x'^\nu}\Lambda^\nu{}_\mu.$$

Osserviamo dunque che il gradiente di uno scalare trasforma come un 4-vettore covariante. Dunque $\partial^\mu\Phi = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi$, che, in componenti è

$$\partial^\mu\Phi = (\frac{\partial\Phi}{\partial x^0}, -\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}, -\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}, -\frac{\partial\Phi}{\partial x^3})$$

è un 4-vettore controvariante. Analogamente, dato un 4 vettore (controvariante) A^ν, la tabella

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu$$

trasformerà come un tensore di rango 2 completamente controvariante.

In più, possiamo osservare che l'operatore di D'Alembert o delle onde di velocità $v = c$ (in $1+3$ dimensioni),

$$\Box := \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}$$

si può scrivere come (ricordando che $x^0 = ct$)

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \eta^{\nu\mu} \partial_\mu \partial_\nu,$$

ed è uno scalare di Lorentz, cioè

$$\partial'_\mu \partial'^\mu = \partial_\mu \partial^\mu,$$

dove x'^μ sono le coordinate di un altro osservatore inerziale. Ricordando che le soluzioni fondamentali di $\Box(f) = 0$ sono del tipo

$$f(t, x, y, z) = \phi_-(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct) + \phi_+(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct),$$

dove $\mathbf{n}$ è un versore, e descrivono onde che propagano con velocità c nella direzione individuata da $\mathbf{n}$, possiamo concludere che onde che propagano con velocità c rispetto ad un osservatore sono viste propagare con la stessa velocità c da ogni altro osservatore.

4.2 Il quadrivettore della forza elettromagnetica

Sappiamo dalla sezione 3 che le equazioni di Newton-Einstein per una particella si scrivono come

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu, \; K^\mu = (\frac{\gamma}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}, \gamma\mathbf{f}). \tag{4.12}$$

Consideriamo il caso di una particella di massa a riposo $m_0 > 0$ e carica e. Dagli esperimenti, sappiamo che posta in un campo elettrico $\mathbf{E}$ e magnetico $\mathbf{B}$ essa è soggetta alla forza di Lorentz, che, nel sistema c.g.s., è data da

$$\mathbf{f} = e(\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})) = \frac{e}{c}(\mathbf{E}c + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})). \tag{4.13}$$

Dunque, secondo la regola della parte a destra di (4.12) il quadrivettore associato alla forza di Lorentz è dato da

$$K^\mu = \frac{e}{c}(\gamma\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \gamma c\mathbf{E} + \gamma\mathbf{v} \times \mathbf{B})). \tag{4.14}$$

Ricordando la espressione (2.37) della quadrivelocità $u^\mu = (\gamma c, \gamma\mathbf{v}) = (u^0, \mathbf{u})$, possiamo riscrivere (4.14) come

$$K^\mu = \frac{e}{c}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{E}u^0 + \mathbf{u} \times \mathbf{B})). \tag{4.15}$$

Osserviamo come alle equazioni del moto di una particella carica in un campo elettromagnetico si possa dare una forma manifestamente covariante. Dalle (4.12) e (4.20) si ha che queste sono date da

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu \quad , K^\mu = \frac{e}{c}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}, \mathbf{E}u^0 + \mathbf{u}\times\mathbf{B})). \tag{4.16}$$

Se introduciamo il tensore doppio completamente controvariante[10]

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

ricordando che $u_\mu = (u^0, -u^i)$, si vede che le (4.16) si possono scrivere come

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c}\mathcal{F}^{\mu\nu}u_\nu. \tag{4.18}$$

Per verificare che $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ sia veramente un tensore possiamo ragionare nel seguente modo. Abbiamo visto che un osservatore $\mathcal{O}$, che misuri un campo elettrico $\mathbf{E}$ e magnetico $\mathbf{B}$, può compendiare la legge di Lorentz (4.13) e la conseguente relazione dell'energia con la legge (4.16). Supponiamo che $\widetilde{\mathcal{O}}$ sia un altro osservatore inerziale, e che le coordinate x^μ e $\widetilde{x}^\mu$ siano relate dalla trasformazione

$$\widetilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \ \left(\Leftrightarrow \widetilde{x}_\mu = (\Lambda^T)^{-1}{}_\mu{}^\rho x_\rho\right) \tag{4.19}$$

Posto che il secondo osservatore misuri campi elettrico e magnetico dati, rispettivamente, da $\widetilde{\mathbf{E}}$ e $\widetilde{\mathbf{B}}$, "assemblandoli" secondo la regola (4.17) in $\widetilde{\mathcal{F}}^{\rho\sigma}$, scriverà la legge di forza-potenza di Lorentz come

$$\frac{d\widetilde{p}^\rho}{d\tau} = \frac{e}{c}\widetilde{\mathcal{F}}^{\rho\sigma}\widetilde{u}_\sigma. \tag{4.20}$$

Dato che p^μ è un quadrivettore controvariante, u_μ è un quadrivettore covariante, e $d\tau, e, c$ sono scalari, questa relazione è equivalente alla

$$\Lambda^\rho{}_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c}\widetilde{\mathcal{F}}^{\rho\sigma}(\Lambda^T)^{-1}{}_\sigma{}^\nu u_\nu$$

[10] Che sia *veramente* un tensore doppio verrà verificato poco più sotto....

Moltiplicando a sinistra per Λ^{-1} si arriva a

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c}(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \widetilde{\mathcal{F}}^{\rho\sigma}(\Lambda^T)^{-1}{}_\sigma{}^\nu u_\nu. \tag{4.21}$$

Dunque (dato che le equazioni devono valere per ogni coppia $\frac{dp^\mu}{d\tau}, u_\mu$, confrontando con la (4.18) si ha

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \widetilde{\mathcal{F}}^{\rho\sigma}(\Lambda^T)^{-1}{}_\sigma{}^\nu,$$

che è equivalente alla relazione di trasformazione

$$\widetilde{\mathcal{F}}^{\rho\sigma} = \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu}. \tag{4.22}$$

4.3 Le equazioni di Maxwell e il tensore del campo elettromagnetico

[11] Per vedere (o giustificare) che il lato destro di questa equazione definisce un quadrivettore di Lorentz, è necessario riconsiderare (e reinterpretare) le equazioni di Maxwell.

Ricordiamo che le equazioni di Maxwell per **E** e **B** (cioè, nel vuoto) in opportune unità di misura (unità di Gauss e sistema cgs) si scrivono nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad \text{(Il campo magnetico non ha sorgenti)} && (4.23)\\
\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \quad \text{(Legge di Faraday)} && (4.24)\\
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \quad \text{(Legge di Coulomb)} && (4.25)\\
\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \quad \text{(Legge di Ampère–Maxwell).} && (4.26)
\end{aligned}$$

I campi (rispettivamente, scalare e vettoriale) ρ e **j** che compaiono al membro di destra delle ultime due equazioni sono la densità di carica ρ e l'intensità di corrente **j**; esse sono legate dalla equazione di conservazione della carica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \tag{4.27}$$

[11] Per gli studenti del corso 2010/2011, questa sezione è da considerarsi facoltativa ai fini dell'esame

Osserviamo subito come l'equazione di conservazione della carica ammetta una naturale interpretazione relativistica. Se consideriamo il quadrivettore $J^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$, la (4.27) si scrive come

$$\frac{\partial J^0}{\partial x^0} + \sum_i \frac{\partial J^k}{\partial x^k} = \partial_\mu J^\mu = 0$$

Consideriamo ora le equazioni (4.23,4.24), ovvero le equazioni omogenee. Supponendo che si stia lavorando in un ap[eryo contraibile di $\mathbb{R}^4$ si ha

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{4.28}$$

Sostituendo questo risultato nella (4.24) otteniamo

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times (\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\,\mathbf{A}}{\partial\,t}) = 0. \tag{4.29}$$

Sempre supponendo che i campi siano definiti in un aperto contraibile, possiamo dunque porre

$$-\mathbf{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial\,\mathbf{A}}{\partial\,t} = \nabla\Phi. \tag{4.30}$$

Il campo scalare Φ ed il campo vettoriale $\mathbf{A}$ si chiamano, rispettivamente, potenziale scalare e potenziale vettore del campo elettromagnetico $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. I potenziali scalare e vettore, non sono univocamente definiti dai campi "fisici" (cioè misurabili) $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Infatti, posto

$$(\Phi', \mathbf{A}') = (\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\,\lambda}{\partial\,t}, \mathbf{A} - \nabla\lambda), \tag{4.31}$$

per una arbitraria funzione $\lambda = \lambda(\mathbf{r}, t)$ (regolare) sullo spazio-tempo, vediamo che le equazioni (4.28,4.30) sono soddisfatte da $(\Phi, \mathbf{A})$ se e solo se lo sono da $(\Phi', \mathbf{A}')$.

L'invarianza espressa da (4.31) si chiama *invarianza di gauge*. Usando l'invarianza di gauge per trovare potenziali $(\Phi, \mathbf{A})$ che soddisfino la condizione supplettiva (detta gauge di Lorentz)

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A} = 0. \tag{4.32}$$

Con queste condizioni, le equazioni disomogenee di Maxwell assumono, per i potenziali, una forma particolarmente semplice. Consideriamo la legge di Gauss $\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho$; sostituendo (4.30) si ha

$$-\frac{1}{c}\nabla(\frac{\partial\,\mathbf{A}}{\partial\,t}) - \Delta\Phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi - \Delta\Phi = 4\pi\rho, \tag{4.33}$$

dove abbiamo utilizzato (4.32) nella forma

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Utilizzando invece l'identità operatoriale

$$rot(rot(A)) = (grad(divA) - \Delta)(A),$$

si ottiene, nella legge di Ampère-Maxwell,

$$-\Delta \mathbf{A} + grad(div(\mathbf{A})) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\, t}(grad\Phi) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}$$

che si riduce, utilizzando (4.32) a

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}. \tag{4.34}$$

Ricordando l'aespressione dell;operator di D'Alembert delle onde lineari che si propagano con velocità c, osserviamo che possimao scrivere le equazioni di Maxwell nel gauge di Lorentz come:

$$\begin{cases} \Box \Phi = 4\pi\rho \\ \Box \mathbf{A} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}. \end{cases} \tag{4.35}$$

Notiamo che se conglobiamo i potenziali scalare e vettore nel quadrivettore

$$A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$$

l'equazione di invarianza di gauge (4.31) assume la forma covariante

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \lambda,$$

e il gauge di Lorentz (4.32) si scrive come l'equazione scalare

$$\partial_\mu A^\mu = 0.$$

Inoltre l'operatore D'Alembertiano con c=velocità della luce nel vuoto si scrive come (ricordando che $x^0 = ct$),

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu,$$

cosicchè le equazioni (4.33) e (4.34) si conglobano in

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu. \tag{4.36}$$

Osserviamo infine che, utilizzando opportunamente le formule per l'innalzamento e l'abbassamento degli indici abbiamo:

$$E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial A^1}{\partial x^0} - \frac{\partial A^0}{\partial x^1} = -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0),$$

dato che $\partial^1 = -\partial_x$ ed analogamente $E_y = -(\partial^0 A^2 - \partial^2 A^0), E_z = -(\partial^0 A^3 - \partial^3 A^0)$. Inoltre,

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = (\frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} = -(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1)$$

e le analoghe per B_y, B_z. Dunque possiamo affermare che $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ contribuiscono a formare un tensore (antisimmetrico) di rango 2 la cui forma completamente controvariante è

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

Questo tensore si chiama *tensore del campo elettromagnetico*. È utile ribadire che $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ non dipende dalla scelta del gauge. Infatti, dalla relazione definitoria (la prima) in (4.37) si vede che $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ è, per la sua antisimmetria, invariante per trasformazioni di gauge $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \lambda$.